2

I POLINOMI

1. CHE COSA SONO I POLINOMI

I POLINOMI

Non sempre l'addizione fra monomi ha come risultato un monomio. Per esempio,

$$5a+2b+\quad 5a\sim 6b = 8a-4b,$$

e $Sa - Ab$ non è un monomio.

Diamo allora la seguente definizione.

•I DEFINIZIONE

Polinomio

Si chiama polinomio ogni somma algebrica di monomi.

Polinomio deriva dall'unione del prefisso greco *polys,* che significa «molti», e del sostantivo latino *nomen,* che significa «parola», «termine». I molti termini che formano un polinomio sono monomi.

Sono polinomi:

$a + 5b;$

$3x^2-2ax+7;$

$Icy^0 + 4m^2x- \quad cy^i.$

Non sono polinomi:

$a + b$

$\{a+b^2f \quad ';$

V $\quad ax - x^i$

Ogni monomio può essere visto come la somma algebrica di se stesso con il monomio nullo:

$$ab^2c = ab^2c + 0.$$

Quindi **ogni monomio è un polinomio.**

I monomi che compongono un polinomio si dicono anche **termini** del polinomio. Per comodità consideriamo solo polinomi che hanno come termini monomi ridotti a forma normale.

0, oltre che monomio nullo, è considerato anche **polinomio nullo.**

g S $\quad 2a^2 + 5b^2 \frac{1}{\quad}$

è un polinomio formato da tre termini, ossia da tre monomi di tipo diverso (non simili) i cui coefficienti sono 2, 5 e $-\frac{1}{-}$.

LA RIDUZIONE A FORMA NORMALE

Un polinomio può anche contenere monomi simili:

$6a^4b^2-3a^3tf \quad + \quad 2a^4b^2.$

In tal caso si sommano i monomi simili. Il polinomio che si ottiene,

$8a^4b^2-5a^3b^5,$

si dice **ridotto a forma normale.**

$-\ 7 + 4a^2 + 3ab-a^2 + 5ab$

non è ridotto a forma normale.
Per ridurlo sommiamo i termini simili; otteniamo:

$7 + 5a^2 + Sab.$

$8x^3y + x^2y^2 - 3x^4$

è un polinomio ridotto a forma normale.

In un polinomio ridotto a forma normale tutti i termini devono essere ridotti a forma normale.

$a^2 + \$aba$

non è ridotto a forma normale; perché lo sia, dobbiamo scriverlo così: $a^2 + òdb.$

Due polinomi ridotti a forma normale, e non nulli, sono **uguali** quando i monomi del primo polinomio sono uguali ai monomi del secondo polinomio, indipendentemente dall'ordine in cui sono scritti.

I polinomi

$4a - 5ab^2$ e $4a + 5ab^2$

non sono uguali, perché $-\ òab^2$ e $+\ 3ab^2$ sono monomi diversi.

$òa^2 - \frac{1}{2}ab - \backslash \frac{2}{5}b^2 \quad t \quad \frac{2}{5}b^2 + 3a^2 - \frac{1}{2}ab$

sono due polinomi uguali.

TIPI DI POLINOMI

I polinomi ridotti a forma normale con 1, 2, 3 e 4 termini hanno nomi particolari. Si chiamano rispettivamente: *monomi, binomi, trinomi* e *quadrinomi.*

$a^2 - 3ab^5$ è un binomio;

$la? - a^3 + 4a + 1$ è un quadrinomio.

IL GRADO DI UN POLINOMIO RIDOTTO

Per definire il grado di un polinomio, lo si riduce a forma normale, poi si prende in esame il grado dei singoli monomi da cui è formato.

! DEFINIZIONE

Grado di un polinomio ridotto

Si chiama grado di un polinomio ridotto il grado maggiore fra i gradi dei suoi termini.

Inoltre il **grado** di un polinomio **rispetto a una lettera** è il maggiore dei gradi dei suoi termini rispetto a tale lettera.

2. LE OPERAZIONI CON I POLINOMI

L'ADDIZIONE

La **somma di due polinomi** è il polinomio che ha per termini tutti i termini dei polinomi addendi.

In generale, il polinomio somma non è ridotto a forma normale.

| Addizioniamo i due polinomi

$5x^3 + 6x^2 - 3$ e $7 - 2x + 4x^2 - 6x^3$.

$(5x^3 + 6x^2 - 3) + (7 - 2x + 4x^2 - 6x^3) =$

Il polinomio somma è formato da tutti i termini dei polinomi addendi:

$= 5x^3 + 6x^2 - 3 + 7 - 2x + 4x^2 - 6x^3 =$

Il polinomio somma non è ridotto; riduciamo i monomi simili:

$= -x^3 + 10x^2 - 2x + 4.$

Cambiando il segno a tutti i termini di un polinomio, si ottiene il **polinomio opposto.**

° L'opposto del polinomio $3x^2 + 2b^2 - 1$ è $- 3x^2 - 2b^2 + 1$.

La somma di due polinomi opposti è 0.

$$(3x^2 + 2b^2 - 1) + (- 3x^2 - 2b^2 + 1) =$$

$$= 3x^2 + 2b^2 - 1 - 3x^2 -2b^2 + l = 0.$$

LA SOTTRAZIONE

La **differenza di due polinomi** è il polinomio che si ottiene addizionando al primo (minuendo) l'opposto del secondo (sottraendo).

Facciamo la sottrazione fra il polinomio $3a^5 + 3a^2b + 5b^2$ e il polinomio $5a^4 + 3a^2b- b^2$.

$$(3a^3 + 3a^2b + 5b^2) - (5a^4 + 3a^2b - b^2) =$$

$$= Qa^3 + 3a^2b + 5b^2) + (- 5a^4 - 3a^2b + b^2) =$$

$$= 3a^l + 3a^2b + 5b^2 - 5a^4 - 3a^2b + b^2 =$$

$$= 3«^3 + 6b^2 - 5a^4.$$

LA MOLTIPLICAZIONE DI UN MONOMIO PER UN POLINOMIO

Consideriamo la moltiplicazione

$$5a^l(a^2 + lab) =$$

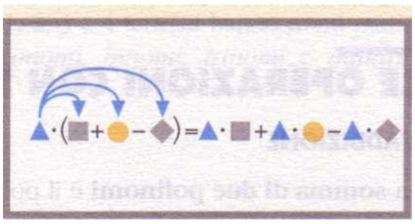
Applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:

$$= 5a^la^2 + 5a^3lab = 5a> + I0a^4b.$$

: REGOLA

Prodotto di un monomio per un polinomio

Il prodotto di un monomio per un polinomio è il polinomio che ha come termini i prodotti del monomio per ciascun termine del polinomio dato.



LE ESPRESSIONI E I POLINOMI

L'espressione

$$3ab(2- b)- b(a- ab)$$

rappresenta un polinomio?

Pensando alla definizione di polinomio, possiamo affermare sicuramente di no, in quanto non è una somma di monomi, bensì una espressione contenente monomi e polinomi.

Tuttavia, a volte, espressioni di questo tipo possono essere trasformate in polinomi: bisogna provare a sviluppare i prodotti e ridurre i termini simili.

Nel nostro esempio otteniamo:

$$6ab - 3ab^2 - ab + ab^2 = 5ab - lab^2.$$

Abbiamo trasformato l'espressione iniziale nel binomio $5ab - lab^2$.

LA MOLTIPLICAZIONE DI DUE POLINOMI

Consideriamo la seguente moltiplicazione:

$$\{la^2 - aXòa^2 - a + 1).$$

Applichiamo la proprietà distributiva, distribuendo il fattore $3a^2 - a + 1$ fra i termini della somma $la^2 - a$:

$$(la^2 - a)(3a^2 - a + 2) =$$

Prima eseguiamo le moltiplicazioni seguendo le frecce sopra, poi seguendo le frecce sotto.

$$la^2(5a^2 - a + 1) - a(3a^2 - a + l) =$$

$$= 6a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 3«^3 + a^2 - la =$$

$$= 6a^4 - 5a^3 + 5a^2 - la.$$

i REGOLA

Prodotto di due polinomi

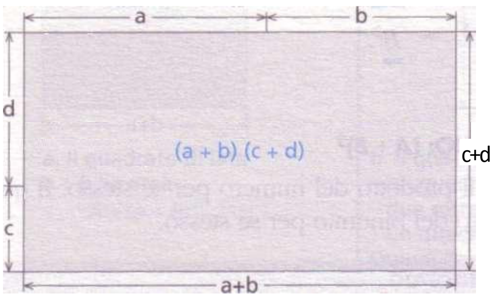
Il prodotto di due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo.

Il grado del polinomio prodotto è la somma dei gradi dei polinomi fattori.

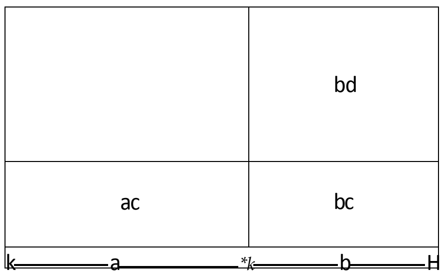
Interpretazione geometrica

Possiamo dare una interpretazione geometrica del prodotto fra polinomi.

• j • **Figura 1.**



a. La base del rettangolo è la somma di due segmenti di misure a e fa; l'altezza è la somma di due segmenti di misure *ce d.*
L'area del rettangolo è:
A = (a + fa) (c + *d).*



b. Il rettangolo può essere visto come l'unione di quattro rettangoli, le cui aree sono
ac, *ad, bc, bd:*
A = ac + ad + bc + *bd.*
Risulta (a + fa) (c + *d) = ac + ad + bc + bd.*